Колесников Е. Ю.

"АНАЛИЗ ПРИНЦИПОВ И ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ"

В списке проблем, перечисленных Эдмундом Ландау – известным немецким математиком – в 1914 г. на Пятом Международном математическом конгрессе, значится третья проблема Ландау (гипотеза Лежандра). Эта гипотеза, утверждающая, что между n^2 и $(n + 1)^2$, где n – натуральное число, всегда найдется простое число, до сих пор не была доказана.[1] В 2011 г. вышла публикация В. А. Минаев "ОБ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ОЦЕНКАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ" претендующая на доказательство данной гипотезы. В своей работе я опишу доказательство данной гипотезы, ничего общего с работой В. А. Минаева не имеющее и более простое, наглядное и убедительное.

Числа, не делящиеся ни на одно простое до p включительно, где p-простое число, обозначим N_p. Данное обозначение будет часто использоваться в данной работе.

Возьмём первое простое число 2 и из числового ряда вычеркнем все числа, делящиеся на 2. Получим числа 1,3,5,7,9... т.е. все нечётные числа. Максимальный интервал между числами равен 2.

Возьмём следующее простое число 3 и из оставшихся чисел вычеркнем все числа, делящиеся на 3. Получим числа 1,5,7,11,13... Из рисунка 1 видно, что закономерность распределения чисел, не делящихся ни на 2 ни на 3 имеет вид 4,2,4,2... Т.е. числа чередуются через 4, затем через 2 и так циклически. Максимальный интервал между числами равен 4.

---

1 - В. А. Минаев "ОБ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ОЦЕНКАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ" 1 стр.

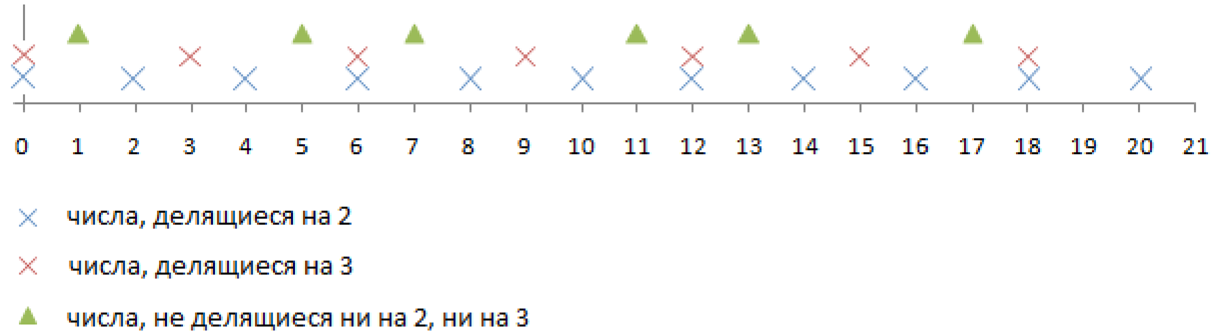

Рисунок 1. Закономерность распределения чисел N_3

Возьмём следующее простое число 5 и попробуем определить закономерность распределения чисел, не делящихся ни на 2, ни на 3, ни на 5. Очевидно, что для того чтобы определить данную закономерность, необходимо из чисел, полученных в предыдущем примере (при помощи закономерности 4,2) вычеркнуть числа, делящиеся на 5.

Рисунок 2. Закономерность распределения чисел N_5

В результате получаем закономерность распределения чисел, не делящихся ни на 2 ни на 3 ни на 5:

6,4,2,4,2,4,6,2 (т.е. числа N_5 идут через 6, через 4, через 2, через 4 единицы и т.д.)

Из рисунка видно, что для описания данной закономерности нам потребовалось повторить предыдущий цикл (4,2) 5 раз. Т.е. числа, делящиеся на 5 должны побывать во всех возможных позициях предыдущего цикла. Для этого нам потребовалось (4+2)*5=30 чисел, идущих подряд. Максимальный интервал между числами равен 6.

Возьмём следующее простое число 7. Для определения закономерности распределения чисел, не делящихся ещё и на 7 нам необходимо предыдущий цикл (6,4,2,4,2,4,6,2) повторить 7 раз, т.е. числа, делящиеся на 7 должны побывать во всех возможных позициях предыдущего цикла. Для этого нам потребуется 30*7=210 чисел идущих подряд.

Рисунок я не привожу, ввиду его громоздкости, однако закон распределения чисел имеет следующий вид: 10,2,4,2,4,6,2,6,4,2,4,6,6,2,6,4,2,6,4,6,8,4,2,4,2,4,8,6,4,6,2,4,6,2,6,6,4,2,4,6,2,6,4,2,4,2,10,2

Максимальный интервал между числами равен 10.

Хочу заметить, что для того чтобы описать данную закономерность распределения ещё для чисел, не делящихся на 11, нам потребуется рассмотреть 2310 чисел, идущих подряд (210*11=2310), а ещё для чисел, не делящихся на 13 - 30030 (2310*13= 30030), а ещё для чисел, не делящихся на 17 - 510510 (30030*17=510510) и т.д.

Однако для выявления определённых свойств чисел, не делящихся на простые числа до определённого n не обязательно рассматривать полную закономерность изменения чисел.

Ниже я приведу несколько утверждений/свойства данных чисел N_p. Данные утверждения логически очевидны и не вызывают сомнений. (первые 2 утверждения не имеют отношения к доказательству гипотезы Лежандра, однако имеют большое значения для понимания принципов и законов распределения простых чисел).

1. (уже упоминалась выше в примерах) Количество чисел, необходимое чтобы описать закономерность распределения чисел N_p равно p# (примориал p).

Например, чтобы описать закон распределения чисел N_{19} (не делящиеся ни на одно простое число до 19 включительно) необходимо рассмотреть 19*17*13*11*7*5*3*2 чисел, идущих подряд.

2. Количество чисел N_p в рассматриваемом множестве p# равно (3-1)*(5-1)*(7-1) *...* (p-1).

Например, справедливо утверждение, что в интервале равном 19# и находящемся в любом месте числовой оси содержится ровно (3-1)*(5-1)*(7-1) *(11-1) *(13-1) *(17-1)* (19-1) чисел N_{19}.

Отсюда следует, что среднее количество чисел N_p на единичном отрезке равно $\frac{(3-1)*(5-1)*(7-1)*...*(p-1)}{p\#}$

Доказательство:

Рассмотрим числа N_3. Имеем в любом интервале, равном 6 (3# = 6) два числа N_3

(3-1=2). В интервале, равном 30 (повторим 6 пять раз) имеем 10 (2*5=10) чисел N_3. Для того чтобы определить количество чисел N_5 в данном интервале, необходимо из количества чисел N_3 вычесть количество чисел N_3, делящихся на 5. Но так как мы интервал, равный 6 повторили 5 раз для того чтобы «5» побывала во всех возможных позициях данного интервала и изначально в интервале 6 имели 2 числа N_3, то, побывав во всех возможных позициях, «5» побывает 2 раза на месте чисел N_3. Т.е. количество чисел N_3, делящихся на 5 равно 2 (в интервале, равном 30). А количество чисел N_5 (в интервале, равном 2*3*5=30) , равно (3-1)*5-(3-1) = (3-1)*(5-1)=8.

Проведя аналогичные рассуждения для чисел N_7 имеем следующее:

Из количества чисел N_5 в интервале, равном 2*3*5*7=210, вычитаем количество чисел N_5, делящихся на «7». Но так как мы интервал, равный 30 повторили 7 раз для того чтобы «7» побывала во всех возможных позициях данного интервала и изначально в интервале 30 имели 8 чисел N_5, то, побывав во всех возможных позициях, «7» побывает 8 раз на месте чисел N_5. Т.е. количество чисел N_5, делящихся на 7 равно 8 (в интервале, равном 210). А количество чисел N_7 (в интервале, равном 2*3*5*7=210) , равно

(3-1)*(5-1)*7-(3-1)*(5-1) = (3-1)*(5-1)*(7-1)

Проводя аналогичные рассуждения для любого числа N_p получаем, что количество чисел N_p в рассматриваемом множестве p# равно (3-1)*(5-1)*(7-1) *...* (p-1) по индукции.

Утверждение доказано.

3. На простые числа действуют те же закономерности, что и для чисел N_p, но с определённой оговоркой.

Обозначим через p_i - i-тое по счету простое число. Тогда все закономерности и свойства N_{Pi} верны и для простых чисел на интервале от p_i^2 до $(p_{i+1})^2$.

Доказательство.

Все числа N_{Pi} на интервале от p_i^2 до $(p_{i+1})^2$ являются простыми числами, т.к. они не делятся ни на одно простое число до p_i по определению и не могут делиться на простые числа больше p_i, т.к. следующее простое число p_{i+1}, а $(p_{i+1})^2$ уже не входит в данный интервал. А так как это есть одни и те же числа, то они имеют одинаковые свойства и подчиняются одинаковым законам.

4. Максимальный интервал между стоящими рядом числами N_{Pi} равен $(2 * p_{i-1})$.

Действительно для N_2 (чисел не делящихся на 2) максимальный интервал равен 2

для N_3 (чисел не делящихся на 2 и на 3) равен 2*2=4

для N_5 равен 2*3=6

для N_7 равен 2*5=10

для N_{11} равен 2*7=14

для N_{13} равен 2*11=22

и т.д.

Доказательство:

То что данный закон справедлив для $p_i = 3$ и $p_i = 5$ видно из рисунков 1 и 2. (Максимальный интервал между числами N_{Pi} равен 2*2=4 для p=3 и 3*2=6 для p=5) Попробуем доказать что данный закон справедлив для любого, сколь угодно большого p_i.

Начиная со следующего простого числа (7) будем располагать 2 последних простых числа на 1 и -1 позицию. (Т.к. у нас циклическое повторение закономерности распределения, то не имеет значения в положительную или отрицательную сторону откладывать числа на числовой оси). Т.е. для числа (7) отмечаем на числовой оси интервалы по 5 и по 7, начиная с 1 и с -1 позиции. Видим, что максимальный интервал в положительную сторону составляет 5 единиц, однако на нуле он не обрывается, а продолжается в отрицательную сторону и имеем полное зеркальное отражение интервалов до p=5 (по 2 и по 3 ед.), т.е. ещё 5 единиц в отрицательную сторону, итого 10 ед.

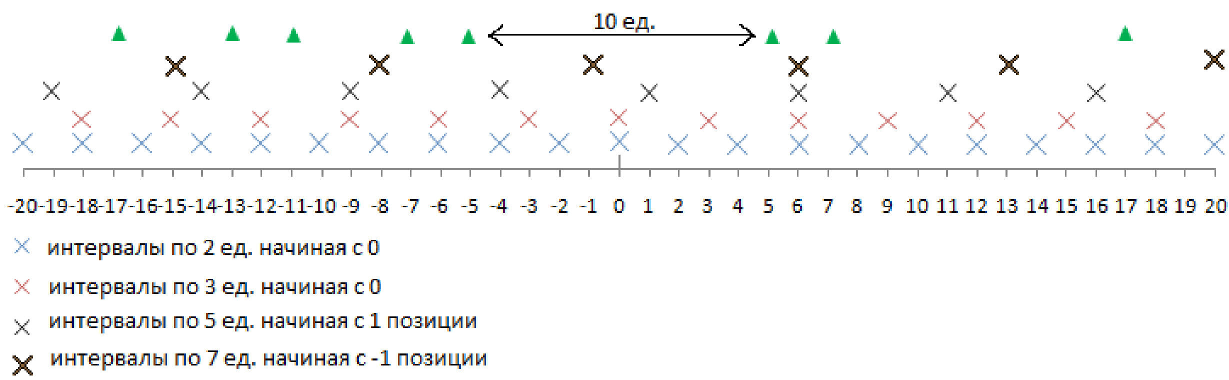

Рисунок 3. Максимальный интервал между числами N_7

Повторим описанные действия для (11). Интервалы по 7 и по 11 будем откладывать начиная с позиции 1 и -1, а интервалы по 5 вернём на место (с 0 позиции). Видим аналогичную картину: 7 единиц в одну сторону и 7 единиц в другую сторону.

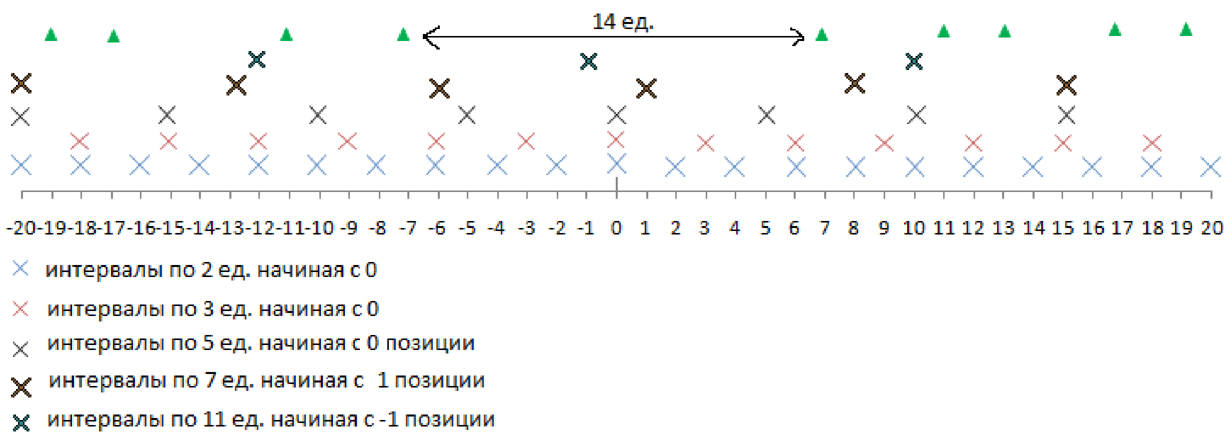

Рисунок 4. Максимальный интервал между числами N_{11}

Заметим, что расположив сколь угодно большое простое число p_i и предыдущее простое p_{i-1} на 1 и -1 позиции, мы получим максимальный интервал в положительную сторону равный p_{i-1} (это очевидно, т.к. все остальные интервалы до p_{i-1} откладывались с нулевой позиции). Но т.к. мы имеем полную зеркальную копию на отрицательной полуоси, то максимальный интервал между стоящими рядом числами N_{Pi} равен $(2 * p_{i-1})$.

Вернёмся к гипотезе Лежандра.

Эта гипотеза, утверждает, что между n^2 и $(n + 1)^2$, где n – натуральное число, всегда найдется простое число.

Расстояние на числовой оси между числами n^2 и $(n + 1)^2$ равно 2n+1.

$(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$

Отсюда следует, что количество чисел между n^2 и $(n + 1)^2$ равно 2n.

Исходя из утверждения 3, обозначим через p_n ближайшее к n простое число, меньшее или равное n. Обозначим через p_{n+1} следующее за p_n простое число. Для данного интервала от p_n^2 до p_{n+1}^2 (интервал от n^2 до $(n + 1)^2$ входит в него) действует закон (4) N_{P_n}. Т.е. максимально возможный интервал между простыми числами на интервале от p_n^2 до p_{n+1}^2 равен $2 * p_{n-1}$. А интервал между числами n^2 и $(n + 1)^2$ равен 2n. Но т. к. $p_{n-1} < p_n \leq n$, то $(2 * p_{n-1})$ всегда меньше чем 2n. Отсюда следует, что между числами n^2 и $(n + 1)^2$ всегда найдётся по крайней мере одно простое число.

Гипотеза доказана.

Кроме того, на основе данного доказательства, можно дополнить данную гипотезу, сказав, что, если $n > 3$ и n-натуральное число, между любыми числами n^2 и $(n + 1)^2$-6 всегда найдётся простое число.

Доказательство:

Сами числа n^2 и $(n + 1)^2$ являются составными. Значит можно с уверенностью сказать, что данная гипотеза будет опровергнута, если начиная с n^2-1 на числовой оси будет присутствовать интервал равный 2n+2, на котором будут отсутствовать простые числа. Заметим, что из двух чисел, идущих подряд хотя бы одно нечетное, а нечётное число, возведённое в квадрат даёт нам нечетное число, следовательно одно из чисел n^2 или $(n + 1)^2$ - нечётное, значит за ним и перед ним стоят чётные числа, но они не могут быть простыми, следовательно необходимый нам интервал отсутствия простых чисел нужно увеличить ещё на 1. Имеем 2n+3.

Заметим, что минимальная разница между p_n и p_{n-1} (а следовательно и между n и p_{n-1}) равна 2 (простые близнецы) и достигается только в случае если n = p.

$p_{n-1} \leq n-2$

$2 * p_{n-1} \leq 2*n-4$

$2 * p_{n-1} < 2*n-3$

Исходя из описанных выше закономерностей, получаем что для того чтобы опровергнуть гипотезу, что между любыми числами n^2 и $(n + 1)^2$-6 всегда существует простое число, необходимо найти интервал, равный минимум 2n+3-6 = 2n-3. Но, как было доказано выше, данный интервал всегда меньше чем 2n-3.

Гипотеза доказана.

И ещё один дополненный вариант данной гипотезы тоже верен: если $n > 3$ и n-любое число (в т.ч. и не натуральное), между любыми числами n^2 и $(n + 1)^2$-4 всегда найдётся простое число.

Доказать данную гипотезу можно проведя рассуждения, аналогичные представленным выше.

Вывод:

Простые числа в настоящее время представляют собой огромный плацдарм для исследований. С одной стороны распределение простых чисел на числовой оси подчиняется определённым закономерностям, причём порой, с невероятной точностью. Однако, с другой стороны простые числа появляются на числовой оси как трава в лесу, и, казалось бы, ни один закон не может точно описать распределение простых чисел. Также, в настоящее время, не существует алгоритма, способного за достаточно короткое время определить является ли сколь угодно большое число простым или нет. Хотя, нахождение подобного алгоритма имело бы большое значение для криптографии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ПЕРВЫЕ 50 МИЛЛИОНОВ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ. Дон Цагир [Электронный ресурс]
   Режим доступа: http://ega-math.narod.ru/Liv/Zagier.htm
   16.02.2012
2. The first fifty million primes [Электронный ресурс]
   Режим доступа: http://primes.utm.edu/lists/small/millions/
   17.02.2012
3. Арнольд В. И. Международный математический конгресс в Берлине // Вестник РАН. — 1999. — № 2. — С. 163
4. Простые числа. [Электронный ресурс] http://ru.wikipedia.org/wiki/Простые_числа
   13.02.2012
5. В. А. Минаев "ОБ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ОЦЕНКАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ" [Электронный ресурс] формат: ".pdf"